La conjecture de Syracuse

par Ludovic PATEY

18 mai 2008

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

La théorie des nombres est souvent considérée comme étant aux mathématiques ce que sont les mathématiques aux autres sciences. Ses conjectures font l'objet de fascination pour les mathématiciens, de par la simplicité des énoncés et leurs paradoxales difficultés à être démontrées. La conjecture de Syracuse fait partie de ces grandes conjectures de la théorie des nombres. Circulant d'universités en universités, proposées par des mathématiciens comme Lothar Collatz dont on attribue souvent la parternité du problème, cette conjecture a mobilisé tant de mathématiciens durant les années de « Guerre Froide » que des rumeurs ont été véhiculées, selon lesquelles ce problème aurait été inventé par les soviétiques pour ralentir la recherche américaine.

La conjecture de Syracuse, parfois appelée problème de Collatz ou problème 3n+1, ne présente pourtant pas de véritables enjeux au niveau de ses applications.

Ce document a pour but de présenter le problème et l'état d'avancement actuel des recherches sur le sujet.

Chapitre 2

Présentation de la conjecture

2.1 La suite de Syracuse

La conjecture porte sur une suite connue sous plusieurs formes qui sont équivalentes quand à la problématique.

La forme la plus connue est

$$u_0 = N$$
$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{Si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{Si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$$

Mais on la trouve également sous la forme

$$u_0 = N$$
$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{Si } u_n \text{ est pair} \\ \frac{3u_n+1}{2} & \text{Si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$$

En effet, si u_n est impair, $3u_n + 1$ est pair, donc divisible par 2.

2.2 Enoncé de la conjecture

D'après la conjecture de Syracuse, il existe un rang à partir duquel la suite va atteindre 1 et effectuer des cycles $\{1, 4, 2\}$ (ou $\{1, 2\}$ avec la seconde formulation) indéfiniment.

Les suites ne vérifiant pas la conjecture seraient donc les suites divergeant vers $+\infty$ et les suites périodiques de cycle est différent du cycle trivial.

Il existe d'autres formulations de la conjecture, toutes équivalentes. Celles-ci seront données après la une petite introduction à la terminologie utilisée à propos de la suite.

2.3 Terminologie associée

La suite étant minorée par 1, sa représentation graphique ressemble à une trajectoire de vol. Ainsi s'est-il développé toute une terminologie autour de la suite, facilitant ainsi l'étude de certains de ses aspects.

- Le **vol** est l'ensemble des valeurs prises par la suite avant d'atteindre le cycle trivial.
- La **durée de vol** est le plus petit indice n tel que $u_n = 1$.
- La **durée de vol en altitude** est le plus petit indice n tel que $u_n < u_0$.
- L' **altitude maximale** est la plus grande valeur des termes de la suite.
- Le **facteur d'expansion** est le rapport de l'altitude maximale sur u_0.

2.4 Exemple avec $N = 12$

Prenons l'exemple du vol pour $N = 12$, afin de clarifier les notions introduites :

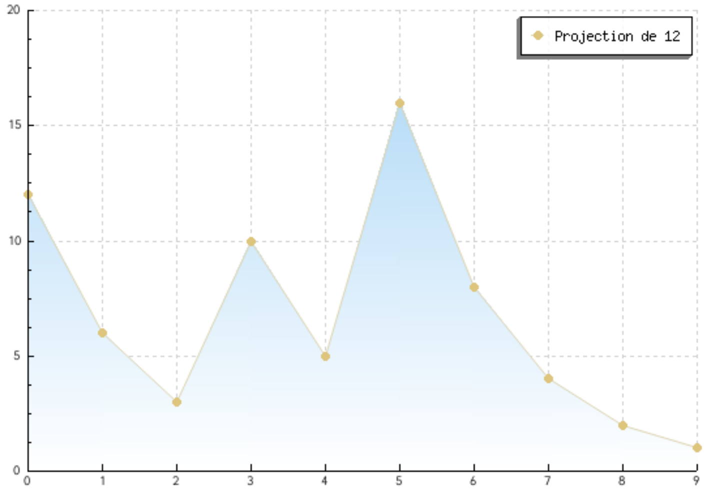
- $u_0 = 12$. C'est un nombre pair, donc $u_1 = \frac{u_0}{2} = 6$.
- $u_1 = 6$. C'est également un nombre pair, donc $u_2 = \frac{u_1}{2} = 3$.
- $u_2 = 3$. Ce terme est impair. Ainsi $u_3 = 3u_2 + 1 = 10$.
- $u_3 = 10$. Nous retrouvons un nombre pair. $u_4 = \frac{u_3}{2} = 5$.
- $u_4 = 5$. Le terme est impair. $u_5 = 3u_2 + 1 = 16$.
- $u_5 = 16$. C'est une puissance de 2, donc $u_6 = 8$, $u_7 = 4$, $u_8 = 2$, et $u_9 = 1$

La suite de Syracuse de premier terme $u_0 = 12$ vérifie donc la conjecture.

Le **vol** pour $N = 12$ est donc $\{12, 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1\}$

- Sa **durée de vol** est 9 ($u_9 = 1$)
- Sa **durée de vol en altitude** est 1 ($u_1 < u_0$)
- Son **altitude maximale** est 16.
- Son **facteur d'expansion** est $\frac{16}{12} \simeq 1.33$.

Voici un graphique représentant son vol :



2.5 Quelques propriétés

Comme nous pouvons le constater, après tout terme impair vient un terme pair. En effet, si u_n est impair, il est de la forme $2k+1$, or $3(2k+1)+1 = 2(3k+2)$ qui est pair. Cette propriété justifie l'existence de la variante de la suite de Syracuse que nous avons vu précédemment.

Maintenant que nous avons introduit le vocabulaire associé à la conjecture, voici quelques formulations équivalentes :

- Pour tout N, la suite associée a une durée de vol finie.
- Pour tout N, la suite associée a une durée de vol en altitude finie.

La première formulation utilise tout simplement la définition de durée de vol : si toute durée de vol est finie, alors il existe un terme égal à 1, et la suite vérifie donc la conjecture.

La seconde formulation est un peu moins directe : elle se démontre à travers un raisonnement par l'absurde : Si pour tout N, la suite associée à la durée de vol en altitude est finie et la conjecture de Syracuse est fausse, alors l'ensemble des N ne vérifiant pas la conjecture est une partie non vide de N, donc admet un plus petit élément. Comme il admet une durée de vol en altitude finie, alors un des termes suivants est plus petit que lui, et ne vérifie pas la conjecture puisqu'il se situe dans la même suite que N. Ainsi, N n'est pas le plus petit nombre ne vérifiant pas la conjecture.

Par conséquent, si une suite a une durée de vol infinie ou une durée de vol en altitude infinie, elle ne vérifie pas la conjecture de Syracuse.

2.6 L'argument heuristique

Outre les résultats empiriques tendant à donner raison à la conjecture - il est toujours possible de trouver un contre-exemple -, un des arguments principaux soutenant la conjecture est un argument probabiliste basé sur la répartition uniforme de nombres pairs et nombres impairs.

Etant donné un entier naturel, il y a 50% de chances qu'il soit pair et 50% qu'il soit impair. Si le nombre est pair, il y a 50% de chances qu'il soit divisible par 4 et 50% de chances qu'il ne le soit pas... Ainsi, en moyenne, le terme sera multiplié par

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{8}} ... = \frac{3}{4} < 1$$

Le coefficient multiplicateur moyen étant inférieur à 1, la suite va avoir tendance à décroître. Il s'agit cependant d'une probabilité et non d'une certitude. Cet argument n'a donc aucune valeur de preuve, mais permet de conforter les mathématiciens dans l'idée que la conjecture est vraie.

Chapitre 3

Les axes de recherche

Bien que les probabilités soutiennent la conjecture, celle-ci a résisté à ce jour aux tentatives des mathématiciens se retrouvant face à un mur. Les axes de recherche sont nombreux, trop même pour être tous évoqués. Nous nous contenterons donc de quelques grands axes :

3.1 Parité et classes d'entiers

Les variations de la suite de Syracuse dépendant de la parité de ses termes, il est tout à fait normal que les mathématiciens se soient penchés sur l'étude de leur parité. Elle peut être effectuée sous plusieurs formes :

Elle se présente tout d'abord sous la forme d'une étude des séquences des restes de la division euclidienne par 2 des termes des suites de Syracuse : $\{1, 0, 0, 1, 0...\}$. En effet, chaque suite peut être caractérisée par sa séquence de parité. L'énoncé de la conjecture équivaudrait alors à la conjecture suivante : *« Toute séquence de parité finit par boucler sur le cycle* $\{1, 0\}$*. »*

Par exemple, pour $u_0 = 3$, les termes suivants étant
$\{3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...\}$, nous obtenons $\{1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...\}$

Chaque terme impair étant obligatoirement suivi d'au moins un terme pair, une nouvelle séquence est apparue : celle se la plus grande valeur a telle sa puissance de 2 divise le terme. Toujours pour $u_0 = 3$, la séquence est alors $\{1, 4, 1, 2, 2, 2.....\}$. La conjecture devient alors *« Toute séquence devient stationnaire de valeur 2. »*

3.2 Construction de contre-exemples

Une des approches de la conjecture a été la recherche de contre-exemples. En effet, si les ordinateurs n'en n'ont trouvé aucun à ce jour, cela ne signifie pas pour autant qu'il n'en n'existe pas : certaines conjectures ont été réfutées à l'aide de contre-exemples de très grande taille comme pour la conjecture de Mertens.

Paul Stadfeld a étudié la création de contre-exemples pour les variantes de la conjecture de la forme $3n+C$, C différent de 1. Il a notamment prouvé que la conjecture de Syracuse était fausse pour tout C n'étant pas une puissance de 3. Cependant, sa méthode ne peut s'étendre au cas où $C = 1 = 3^0$. Sa démarche permet d'attirer l'attention sur l'intérêt que peut représenter la construction de contre-exemples pour pallier aux limites des capacités des ordinateurs actuels.

3.3 Vérification empirique

Bien qu'il soit impossible de démontrer la conjecture de Syracuse empiriquement, du fait de l'existence d'une infinité d'entiers naturels, la vérification empirique de la conjecture permet de conforter les mathématiciens dans leur intuition selon laquelle toute suite va atteindre 1. De plus, il n'est pas impossible de tomber sur un contre-exemple qui serait alors un cycle non-trivial (en effet, il n'est pas possible de vérifier empiriquement qu'une suite diverge, mais il est possible de vérifier qu'elle est périodique).

La conjecture est vérifiée pour tous les nombres inférieurs à $17 \times 2^{58} = 4899916394579099648$.

Des mathématiciens ont également trouvé une minoration de la longueur d'un cycle non trivial en fonction du nombre n tel que tous les entiers qui lui sont inférieurs vérifient la conjecture. C'est notamment l'approche de Matti K. Sinisalo qui obtient le résultat suivant :

Théorème 3.1 (Théorème de Sinisalo) *Soit R un entier naturel tel que la conjecture soit vérifiée jusqu'à R. Soit $\frac{n}{k}$ le nombre rationnel avec k le plus petit dénominateur tel que $\frac{ln(3)}{ln(2)} < \frac{n}{k} < \frac{ln\left(3+\frac{1}{R}\right)}{ln(2)}$. La plus petite longueur d'un cycle non-trivial est alors $n + k$.*

Le résultat de Sinisalo a pour conséquence de prouver que s'il existe un cycle non-trivial, il est de très grande taille. Un exemple de création d'une minoration de la longueur des cycles non-triviaux est proposé un peu plus loin.

Il existe de nombreux moyens d'optimiser la vérification empirique, en remarquant par exemple que le premier nombre ne vérifiant pas la conjecture aura une durée de vol en altitude infinie, ce qui exclus les nombres pairs, et les nombres de la forme $4k + 1$. En effet, $3(4k + 1) + 1 = 4 * (3k + 1)$.

La recherche d'optimisations de la vérification empirique fait l'objet d'une étude à part entière par la communauté mathématique.

3.4 Généralisation et indécidabilité

Face à l'échec des différentes tentatives de démonstration, des mathématiciens comme John Conway se sont penchés sur la question de l'indécidabilité de la conjecture. Pour cela, ils se sont basés sur une généralisation des suites de Syracuse :

Une suite généralisée de Syracuse est de la forme

$$u_0 = N$$
$$u_{n+1} = \begin{cases} a_1 \times u_n + b_1 & \text{Si } u_n \equiv 0 \ [p] \\ a_2 \times u_n + b_2 & \text{Si } u_n \equiv 1 \ [p] \\ \ldots \\ a_p \times u_n + b_p & \text{Si } u_n \equiv p-1 \ [p] \end{cases}$$

avec p un entier naturel strictement supérieur à 2, et a_i et b_i des nombres rationnels.

En 1972, John Conway prouve l'indécidabilité algorithmique de la généralisation des suites de Syracuse (impossibilité de vérifier la véracité ou de réfuter certaintes suites de Syracuse par un algorithme). Ce résultat ne prouve cependant pas l'indécidabilité la conjecture, d'autant plus que la notion d'indécidabilité est relative à une théorie.

Ce résultat permet cependant de mieux comprendre la difficulté qu'ont les mathématiciens à résoudre le problème de Syracuse.

Chapitre 4

Etude de la fonction de Syracuse

Dans cette partie seront démontrés quelques résultats personnels.

Pour les démonstrations qui vont suivre, nous aurons recours à une des variantes de la suite de Syracuse :

$$(u_n) = \begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{2^{a_{n+1}}} \end{cases}$$

avec u_0 un nombre impair et a_{n+1} la plus grande puissance de 2 tel que $2^{a_{n+1}}$ divise $3u_n + 1$

La suite précédente est souvent présentée comme la fonction de Syracuse suivante :

$$f(n) = \frac{3n+1}{2^{sup(n)}}$$

Avec $sup(n)$ la plus grande puissance de 2 telle que $2^{sup(n)}$ divise $3n + 1$. Cependant, nous avons préféré la présenter sous forme d'une suite pour pouvoir mettre en relief les liens entre les suites (a_n) et (u_n).

4.1 Etude de la suite (a_n)

Dans cette partie, nous allons étudier la suite (a_n).

La notion de suite périodique est à prendre au sens large, c'est-à-dire qu'il existe un rang à partir duquel la suite sera périodique.

Autrement dit : $\exists T \in \mathbf{N}^*, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n > N \Rightarrow u_{n+T} = u_n$

Commençons par construire quelques égalités que l'on aura à réutiliser à plusieurs occasions sous plusieurs formes. Elles seront donc considérées comme acquises.

Le $n$ième terme de la suite est de la forme suivante :

$$u_n = \frac{3...\left(\frac{3\left(\frac{3u_0+1}{2^{a_1}}\right)+1}{2^{a_2}}\right)...+1}{2^{a_n}}$$

En développant la fraction, nous obtenons

$$u_n = \frac{3^n u_0}{2^{a_1+a_2+...+a_n}} + \frac{3^{n-1}}{2^{a_1+a_2+...+a_n}} + \frac{3^{n-2}}{2^{a_2+...+a_n}} + ... + \frac{1}{2^{a_n}}$$

Ou en l'écrivant autrement :

$$u_n = \frac{3^n u_0}{\prod_{i=1}^{n} 2^{a_i}} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{3^i}{\prod_{j=0}^{i} 2^{a_{n-j}}} \quad (1)$$

En multipliant par $\prod_{i=1}^{n} 2^{a_i}$ chaque membre de l'égalité, nous obtenons

$$\left(\prod_{i=1}^{n} 2^{a_i}\right) u_n = 3^n u_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \left(3^i \prod_{j=1}^{n-i-1} 2^{a_j}\right) \quad (2)$$

Si la suite (u_n) est périodique de période n, alors $u_n = u_0$. En reportant dans (1), et en mettant u_0 en facteur, nous obtenons

$$u_0 \left(1 - \frac{3^n}{\prod_{i=1}^{n} 2^{a_i}}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{3^i}{\prod_{j=0}^{i} 2^{a_{n-j}}} \quad (3)$$

En reportant $u_n = u_0$ dans (2) et en mettant u_0 en facteur, nous obtenons

$$\left(\prod_{i=1}^{n} 2^{a_i} - 3^n\right) u_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \left(3^i \prod_{j=1}^{n-i-1} 2^{a_j}\right) \quad (4)$$

Proposition 4.1 *Si la suite (a_n) est la suite constante 1, ou ne contient aucune occurrence égale à 1, alors la suite (u_n) vérifie la conjecture de Syracuse*

Démonstration :

- Si $a_{n+1} > 1$ pour tout n, alors $u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{2^{a_n}} < u_n$ si $u_n > 1$. Sachant que la suite (u_n) est minorée par 1 et est à valeurs dans $\mathbf{N}$, donc elle va devenir stationnaire et va valoir 1.

- Si $a_n = 1$ pour tout n, alors $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{2}$
  Reprenons l'égalité (1) en remplaçant les a_i par 1

$$u_n = \frac{3^n u_0}{2^n} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{3^i}{2^{i+1}}$$

  Le second terme étant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $v_0 = \frac{1}{2}$ et de raison $\frac{3}{2}$

$$u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n u_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^n}{1-\frac{3}{2}}\right)$$

  En simplifiant le membre de droite, l'égalité devient :

$$u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n u_0 + \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1$$

  En multipliant par 2^n de part et d'autre

$$2^n u_n = 3^n(u_0+1) - 2^n$$

  Ainsi 2^n divise $3^n(u_0+1)$ or est premier avec 3^n, donc d'après le théorème de Gauss, 2^n divise $u_0 + 1$ et cela pour tout entier naturel n. 0 est le seul nombre divisible par toutes les puissances de 2, donc $u_0 + 1 = 0$, or u_0 est un entier naturel, donc cela est impossible.

Proposition 4.2 *Si (a_n) est une suite stationnaire, alors (u_n) vérifie la conjecture de Syracuse.*

Démonstration :

- Si (a_n) vaut 1 à partir d'un certain rang, il suffit d'appliquer la proposition 4.5.
- Si (a_n) vaut $k, k \neq 1$ à partir d'un certain rang, alors la suite ne contient aucune occurrence de 1 à partir d'un certain rang. La proposition 4.5 s'applique encore.

Proposition 4.3 *Soit une suite de Syracuse, périodique et ne vérifiant pas la conjecture de Syracuse, alors la période est strictement supérieure à 1.*

Démonstration :

Raisonnons par l'absurde : si la suite a une période égale à 1, alors a_i est stationnaire. La proposition 4.2 nous permet donc de dire qu'elle vérifie alors la conjecture de Syracuse.

Théorème 4.4 *La suite* (u_n) *est une suite périodique si et seulement si la suite* (a_n) *est périodique.*

Démonstration :

Dans le sens direct, l'implication est triviale. En effet, si (u_n) est périodique, alors sachant que pour chaque terme u_n, il n'existe qu'un seul entier naturel tel que ce soit la puissance de 2 la plus grande divisant $3u_n + 1$, la suite (a_n) sera également périodique.

Démontrons la réciproque :

Soit k la période de la suite (a_n). Alors, la sous-suite (v_n) donnée par $v_n = u_{k*n}$ est une suite arithmético-géométrique.

Elle peut être écrite sous la forme

$$v_{n+1} = \frac{3 ... \left(\frac{3\left(\frac{3v_n+1}{2^{a_1}}\right)+1}{2^{a_2}} \right) ... + 1}{2^{a_k}}$$

Donc

$$v_{n+1} = \frac{3^k v_n}{\prod_{i=1}^{k} 2^{a_i}} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{3^i}{\prod_{j=0}^{i} 2^{a_{k-j}}}$$

Notons $v_{n+1} = Av_n + B$ avec $A = \frac{3^k}{\prod_{i=1}^{k} 2^{a_i}}$ et $B = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{3^i}{\prod_{j=0}^{i} 2^{a_{k-j}}}$

Exprimons v_n en fonction de v_0, donc de u_0

$$v_n = A^n v_0 + \sum_{i=0}^{n-1} A^i B$$

Nous retrouvons à droite la somme des n premiers termes d'une suite géométrique.

$$v_n = A^n v_0 + B \left(\frac{1 - A^n}{1 - A} \right)$$

En multipliant par $(1 - A)$ chaque membre de l'égalité :

$$(1 - A)v_n = (1 - A)A^n v_0 + B \left(1 - A^n\right)$$

$$(1-A)v_n = A^n\left((1-A)v_0 - B\right) + B$$

Or $A = \frac{3^C}{2^D}$ avec $D > 0$, donc

$$(1-A)v_n = \left(\frac{3^C}{2^D}\right)^n \left((1-A)v_0 - B\right) + B$$

En multipliant par $\left(2^D\right)^n$ de part et d'autre :

$$\left(2^D\right)^n (1-A)v_n = \left(3^C\right)^n \left((1-A)v_0 - B\right) + \left(2^D\right)^n B \quad (5)$$

Donc $\left(2^D\right)^n$ divise $\left(3^C\right)^n \left((1-A)v_0 - B\right)$

or est premier avec $\left(3^C\right)^n$, donc d'après le théorème de Gauss, $\left(2^D\right)^n$ divise $(1-A)v_0 - B$

et cela pour tout entier naturel n. Donc $(1-A)v_0 - B = 0$

Ainsi, en reportant dans (5) :

$$\left(2^D\right)^n (1-A)v_n = \left(2^D\right)^n B$$

Donc

$$(1-A)v_n = B$$

La suite (v_n) est donc une suite constante, donc la suite (u_n) est périodique.

Proposition 4.5 *Pour tout terme u_n, si a_n est pair, alors u_n est de la forme $6k+1$, sinon il est de la forme $6k+5$.*

Démonstration :

Reprenons l'égalité (2) et changeons la somme de côté :

$$3^n u_0 = \left(\prod_{i=1}^{n} 2^{a_i}\right) u_n - \sum_{i=0}^{n-1} \left(3^i \prod_{j=1}^{n-i-1} 2^{a_j}\right)$$

Tous les termes de la somme sont multiples de 3 sauf pour $i = 0$. Ainsi,

$$\left(\prod_{i=1}^{n} 2^{a_i}\right) u_n - \prod_{i=1}^{n-1} 2^{a_i} \equiv 0 \ [3]$$

Or $2 \equiv -1$ [3] et $2^2 \equiv 1$ [3]

Il se présente 4 cas. Examinons-les un par un :

– Si la somme des a_i est paire et a_n aussi $u_n - 1 \equiv 0$ [3]
– Si la somme des a_i est paire mais pas a_n $u_n + 1 \equiv 0$ [3]
– Si la somme des a_i est impaire et a_n aussi $-u_n + 1 \equiv 0$ [3].
– Si la somme des a_i est impaire mais pas a_n $-u_n - 1 \equiv 0$ [3].

Ainsi, lorsque a_n est pair, $u_n \equiv 1$ [3] et lorsque a_n est impair, $u_n \equiv 2$ [3]. Lorsque a_n est pair, u_n est donc de la forme $3k + 1$ et sinon est de la forme $3k + 2$.

Comme u_n est un nombre impair, il s'ensuite que s'il est de la forme $3k + 1$, alors k est pair et que s'il est de la forme $3k + 2$, k est impair. Nous obtenons donc le résultat de la proposition.

4.2 Longueur minimale des cycles de Syracuse

Le but est de trouver une expression de $M(k)$ tel que si tous les entiers naturels inférieurs à $M(k)$ vérifient la conjecture de Syracuse, alors il n'existe pas de suite périodique non triviale de période k.

Autrement dit, soit $\mathbf{I}$ l'ensemble des entiers naturels impairs

$$[\forall u_0 \in \mathbf{I} / u_0 \leq M(k), \exists n \in \mathbf{N} / u_n = 1] \Rightarrow [\forall u_0 \in \mathbf{I}, u_k \neq u_0]$$

Proposition 4.6 *Soit f une fonction de $\mathbf{N}^n$ dans $\mathbf{N}$ telle que*

$$\forall (a_1, a_2, .., a_n) \in \mathbf{N}^n, \forall (i, j) \text{ tel que } 1 \leq i \leq j \leq n$$

$$\begin{cases} f(a_1, a_2, .., a_i + 1, .., a_n) < f(a_1, a_2, .., a_i, .., a_n) & (1) \\ f(a_1, a_2, .., a_i + 1, .., a_j, .., a_n) > f(a_1, a_2, .., a_i, .., a_j + 1, .., a_n) & (2) \end{cases}$$

Le maximum de la fonction tel que la contrainte $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq k$ soit vérifiée est atteint pour $(a_1, a_2, .., a_n) = (k, 0, ..., 0)$

Démonstration :

L'expression (1) traduit simplement le fait que la fonction atteigne son maximum pour $(a_1, a_2, ..., a_n) = (0, 0, ..., 0)$.

L'expression (2) traduit le fait que l'accroissement de variable a_1 fait décroître moins rapidement la fonction que a_2, elle même moins que a_3... jusqu'à a_n.

Raisonnons par l'absurde.

S'il au moins i différent de 1 tel que $a_i \neq 0$ et le maximum est atteint pour le nuplet $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Alors, prenons $a_1^{'} = a_1 + a_i$ et $a_i^{'} = 0$.

D'après (2), $f(a_1^{'}, a_2, .., a_i^{'}, .., a_n) > f(a_1, a_2, .., a_i, .., a_n)$

et $a_1^{'} + a_2 + .. + a_i^{'} + .. + a_n = a_1 + a_2 + .. + a_i + .. + a_n \geq k$

Ainsi, le maximum n'était pas atteint pour ce nuplet, donc le nuplet pour lequel le maximum est atteint est $(k, 0, ..., 0)$.

Nous nommerons « fonction de la forme F1 » toute fonction vérifiant les conditions précédentes.

Proposition 4.7 *Si la suite (u_n) et périodique de période n, alors u_0 vérifie l'égalité suivante :*

$$u_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{3^i}{\left(\prod_{j=0}^{i} 2^{a_{n-j}}\right)\left(1 - \frac{3^n}{\prod_{j=1}^{n} 2^{a_j}}\right)}$$

Démonstration :

Reprenons l'égalité (3) de l'étude de la suite (a_n). u_0 vérifie l'égalité suivante :

$$u_0 \left(1 - \frac{3^n}{\prod_{i=1}^{n} 2^{a_i}}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{3^i}{\prod_{j=0}^{i} 2^{a_{n-j}}}$$

En isolant u_0, l'équation devient

$$u_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{3^i}{\left(\prod_{j=0}^{i} 2^{a_{n-j}}\right)\left(1 - \frac{3^n}{\prod_{j=1}^{n} 2^{a_j}}\right)}$$

Proposition 4.8 *Les variables a_i sont des entiers naturels strictements positifs tels que*

$$a_0 + a_1 + ... + a_n > \frac{n \ln 3}{\ln 2}$$

Démonstration :

Sachant que tous les termes de la suite (u_n) sont impairs, $3u_n + 1$ est pair, donc les a_i sont strictement positifs, donc minorés par 1.

u_0 étant positif, $\left(1 - \frac{3^n}{\prod_{i=0}^{n} 2^{a_i}}\right)$ doit l'être également.

Ainsi, $(\prod_{i=1}^{n} 2^{a_i} > 3^n)$

Ou autrement dit $(a_1 + a_2 + ... + a_n) \ln 2 > n \ln 3$

D'où le résultat de la proposition

Proposition 4.9 *Le terme u_0 atteint son maximum pour* $(a_1, a_2, ..., a_n) = \left([\frac{n \ln 3}{\ln 2}] - n + 2, 1, ..., 1\right)$

Démonstration :

Etant donné que le nombre n est fixé, si un des a_i croît, $\left(1 - \frac{3^n}{\prod_{j=1}^{n} 2^{a_j}}\right)$ croît également ainsi que $\left(\prod_{j=0}^{i} 2^{a_{n-j}}\right)$.

D'autre part, si j est supérieur à i, a_j fait décroître u_n plus rapidement que a_i.

En effet, d'après l'égalité (3) de l'étude de la suite (a_n), la partie $\left(\prod_{j=0}^{i} 2^{a_{n-j}}\right)$ montre clairement que a_n sera présent dans tous les termes de la somme, a_{n-1} dans $n - 1$ termes, ...

Le maximum de la fonction est atteint pour les a_i minimums tels que l'inégalité du lemme des contraintes soit vérifié, et les a_i soient non nuls.

Nous nous trouvons avec une fonction de la forme F1, donc la proposition 4.6 peut s'appliquer. La contrainte est $k = \frac{n \ln 3}{\ln 2}$.

Ainsi, le maximum est atteint pour

$$(a_1, a_2, a_3....a_n) = (a_1, 1, 1...1) \text{ tel que } a_0 + a_1 + ... + a_n > \frac{n \ln 3}{\ln 2}$$

Donc $(n - 1 + a_1) \ln 2 > n \ln 3$

Ainsi la valeur minimum de a_1 est $[\frac{n \ln 3}{\ln 2}] - n + 2$

La valeur maximum que prends la fonction est donc atteinte en

$$(a_1, a_2, a_3....a_n) = ([\frac{n \ln 3}{\ln 2}] - n + 2, 1, 1...1)$$

Théorème 4.10 *Soit M(n) tel que*

$$M(n) = \frac{\left(2^{[\frac{n \ln 3}{\ln 2}]+1}\right)\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1\right) + 3^{n-1}}{\left(2^{[\frac{n \ln 3}{\ln 2}]+1} - 3^n\right)}$$

Alors

$$[\forall u_0 \in \mathbf{I}/u_0 \leq M(k), \exists n \in \mathbf{N}/u_n = 1] \Rightarrow [\forall u_0 \in \mathbf{I}, u_k \neq u_0]$$

Démonstration :

Revenons à l'égalité de la proposition 4.7 :

$$u_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{3^i}{\left(\prod_{j=0}^{i} 2^{a_{n-j}}\right)\left(1 - \frac{3^n}{\prod_{j=1}^{n} 2^{a_j}}\right)}$$

Elle peut également s'écrire comme suit :

$$u_0 = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{3^i}{\left(\prod_{j=0}^{i} 2^{a_{n-j}}\right)\left(1 - \frac{3^n}{\prod_{j=1}^{n} 2^{a_j}}\right)} + \frac{3^{n-1}}{\left(2^{a_1}\prod_{j=0}^{n-2} 2^{a_{n-j}}\right)\left(1 - \frac{3^n}{\prod_{j=1}^{n} 2^{a_j}}\right)}$$

En remplaçant les a_i par leurs valeurs pour obtenir le maximum de la fonction, nous obtenons

$$u_0 \leq \sum_{i=0}^{n-2} \frac{3^i}{(2^{i+1})\left(1 - \frac{3^n}{2^{[\frac{n \ln 3}{\ln 2}]+1}}\right)} + \frac{3^{n-1}}{\left(2^{[\frac{n \ln 3}{\ln 2}]-n+2} 2^{n-1}\right)\left(1 - \frac{3^n}{2^{[\frac{n \ln 3}{\ln 2}]+1}}\right)}$$

Nous pouvons simplifier le second terme. L'inégalité devient alors

$$u_0 \leq \sum_{i=0}^{n-2} \frac{3^i}{(2^{i+1})\left(1 - \frac{3^n}{2^{[\frac{n \ln 3}{\ln 2}]+1}}\right)} + \frac{3^{n-1}}{\left(2^{[\frac{n \ln 3}{\ln 2}]+1}\right)\left(1 - \frac{3^n}{2^{[\frac{n \ln 3}{\ln 2}]+1}}\right)}$$

Le membre gauche est égal à la somme des $n-1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{2*\left(1-\frac{3^n}{2^{[\frac{n \ln 3}{\ln 2}]+1}}\right)}$ et de raison $\frac{3}{2}$

L'inégalité peut donc s'exprimer ainsi :

$$u_0 \leq \frac{1}{2*\left(1 - \frac{3^n}{2^{[\frac{n \ln 3}{\ln 2}]+1}}\right)} \frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{3}{2}} + \frac{3^{n-1}}{\left(2^{[\frac{n \ln 3}{\ln 2}]+1}\right)\left(1 - \frac{3^n}{2^{[\frac{n \ln 3}{\ln 2}]+1}}\right)}$$

Et en la simplifiant, la formule devient

$$u_0 \leq \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1}{\left(1 - \frac{3^n}{2^{[\frac{n \ln 3}{\ln 2}]+1}}\right)} + \frac{3^{n-1}}{\left(2^{[\frac{n \ln 3}{\ln 2}]+1} - 3^n\right)}$$

En mettant le tout en facteur commun

$$u_0 \leq \frac{\left(2^{[\frac{n \ln 3}{\ln 2}]+1}\right)\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1\right) + 3^{n-1}}{\left(2^{[\frac{n \ln 3}{\ln 2}]+1} - 3^n\right)}$$

Donc en définissant

$$M(n) = \frac{\left(2^{[\frac{n \ln 3}{\ln 2}]+1}\right)\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1\right) + 3^{n-1}}{\left(2^{[\frac{n \ln 3}{\ln 2}]+1} - 3^n\right)}$$

$$[\forall u_0 \in \mathbf{I}/u_0 \leq M(k), \exists n \in \mathbf{N}/u_n = 1] \Rightarrow [\forall u_0 \in \mathbf{I}, u_k \neq u_0]$$

Remarque : Ce résultat peut être amélioré en prenant en compte le fait que le plus petit entier naturel appartennant à un cycle trivial a une durée de vol en altitude infinie.

4.3 Antécédents par f

Dans cette partie, nous allons nous pencher sur les antécédents de $\{1\}$ par f^p.

$$\forall p \in \mathbf{N}, x \in f^{-p}(\{1\}) \Rightarrow f^p(x) = 1$$

La conjecture de Syracuse est équivalente à l'égalité suivante

$$f^{-\infty}(\{1\}) = \mathbf{N}$$

Du fait de l'existence du cycle trivial, $1 \in f^{-1}(\{1\})$. Il en découle que $1 \in f^{-p}(\{1\})$. Nous obtenons donc la relation d'inclusion suivante :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \forall q \in \mathbf{N}, p < q \Rightarrow f^{-p}(\{1\}) \subset f^{-q}(\{1\})$$

Les antécédents de $\{1\}$ par f sont relativement simples à trouver : il s'agit des puissances de x tels que $3x + 1$ est une puissance de 2 :

$$f^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbf{N}, 3x+1 = 2^k, k \in \mathbf{N}^*\}$$

L'ensemble des k tels quel 3 divise $2^k - 1$ est l'ensemble des nombres pairs. En effet, $3 \mid 2^k - 1 \Rightarrow 2^k \equiv 1[3]$, or $2 \equiv -1[3]$, donc $2^k \equiv (-1)^k[3]$.

Nous obtenons donc l'égalité

$$f^{-1}(\{1\}) = \{1\} \cup \left\{\frac{(2^{2k}-1)}{3}, k \in \mathbf{N}^*\right\}$$

Les antécédents de $\{1\}$ par f^2 sont, outre les antécédents par f, l'ensemble des x tels que $3x+1 \in \left\{2^k.f^{-1}(\{1\}), k \in \mathbf{N}\right\}$.

Par des procédés de calcul similaires, nous obtenons

$$U_1 = \left\{\frac{\left(2^{2(3k_1+1)}-1\right)2^{2k_2}-3}{3^2}, (k_1,k_2) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*\right\}$$

$$U_2 = \left\{\frac{\left(2^{2(3k_1+2)}-1\right)2^{2k_2+1}-3}{3^2}, (k_1,k_2) \in \mathbf{N^2}\right\}$$

$$f^{-2}(\{1\}) = f^{-1}(\{1\}) \cup U_1 \cup U_2$$

L'expression des antécédents de $\{1\}$ par f^p devient très rapidement compliquée. Le nombre de sous-ensembles croît avec p car le nombre de variables k_i augmente.

Pour $p = 3$, notons

$$U_{a,b,c} = \frac{\left((2^a-1)\,2^b-3\right)2^c-3^2}{3^3}$$

$$f^{-3}(\{1\}) = f^{-2}(\{1\}) \begin{array}{ll} \cup\, U_{2(3(3k_1)+1),2(3k_2+1),2k_3} & \cup\, U_{2(3(3k_1)+1),2(3k_2+2),2k_3+1} \\ \cup\, U_{2(3(3k_1+1)+1),2(3k_2),2k_3+1} & \cup\, U_{2(3(3k_1+1)+1),2(3k_2+1),2k_3} \\ \cup\, U_{2(3(3k_1+2)+1),2(3k_2),2k_3+1} & \cup\, U_{2(3(3k_1+2)+1),2(3k_2+2),2k_3} \end{array}$$

Avec les k_i décrivant $\mathbf{N}$

Il est possible de généraliser l'égalité pour tout p, mais nous ne le ferons pas car la formule générale est très peu lisible et n'apporte pas d'élément remarquable permettant d'espérer obtenir de nouveaux outils pour démontrer la conjecture.

Ces résultats ne sont pas tout à fait inutiles, car nous pouvons en déduire que les équations diophantiennes obtenues à partir des $f^{-p}(\{1\})$ n'ont pas $\mathbf{N}$ pour solution, car en cas contraire, l'ensemble des nombres de termes impairs de la suite de Syracuse serait majoré par p.

Chapitre 5

Conclusion

Malgré la mobilisation massive de mathématiciens sur la conjecture de Syracuse, il est toujours impossible d'apporter la réponse à la question « Toute suite de Syracuse finit-elle par atteindre 1 ? ». La difficulté à résoudre ce problème de nos jours s'avère déconcertante, bien que John Conway nous aide à l'admettre en prouvant que certaines variantes de la conjecture sont indécidables. Le peu de résultats obtenus sur le sujet tend à donner raison à la célèbre citation du mathématicien Paul Erdös « Les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes ».

Le cas de la conjecture de Syracuse fait echo à la complexité croissante des problèmes auxquels les mathématiciens sont confrontés, amenant à des démonstrations pour lesquelles la véracité ne peut être évaluée qu'avec des probabilités (voir la conjectrure Kepler dont la démonstration a été validée avec 99% de certitude). Ces signes précurseurs soulignent la nécessité de trouver de nouvelles méthodes de démonstration pour aborder « de tels problèmes ».

Bibliographie

[1] Wikipedia. *Collatz conjecture*, Mai 2008.
http ://en.wikipedia.org/wiki/Collatz_conjecture
.

[2] Stuart A. Kurtz et Janos Simon. *The Undecidability of the Generalized Collatz Problem*, Décembre 2006. http ://people.cs.uchicago.edu/ simon/RES/collatz.pdf
.

[3] Matti K. Sinisalo. *On the minimal cycle lengths of the collatz sequences*, Juin 2003. http ://www.geocities.com/mattiksinisalo/collatz.doc
.

[4] Gottfried Helms. *Cycles in the Collatz-problem*, 2000 - 2007.
http ://go.helms-net.de/math/collatz/Collatz061102.pdf
.

[5] Thiago Aparecido Catalan Francis Charles Motta, Henrique Roscoe de Oliveira. *An Analysis of the Collatz Conjecture*, 2006.
http ://www.csun.edu/ vcmth02i/Collatz.pdf
.

[6] Jean-Paul Delahaye. *La conjecture de Syracuse*. ***Pour la Science***, Mai 1998.

Annexe A

Formes à durée de vol en altitude finie

Il a été vu que le plus petit nombre ne vérifiant pas la conjecture de Syracuse devait être de la forme $2n+1$, puis en affinant, de la forme $4n+3$, et ainsi de suite. La méthode de recherche des formes suivant un algorithme déterminé, il est facile de le transcrire dans un langage compréhensible par un ordinateur. La méthode d'affinement se base sur la création d'une partition de l'ensemble des valeurs possibles, puis d'étudier l'évolution de chaque partie.

Voici le principe de l'algorithme :

> Etant donnés entiers naturels m et n, testons les nombres de la forme $2^m k + n$ en calculant les prochains termes de la suite de Syracuse.
>
> Pour chaque prochain terme de la suite
> – Si le terme est inférieur à $2^m k + n$, alors ce nombre vérifie la conjecture
> – Si le terme est inférieur à $2^m k + n$ pour k pair ou impair, tester $2^{m+1}k + n$ et $2^{m+1}k + 2^m + n$
> – Sinon, passer au terme de la suite

L'expérience montre que l'on finit toujours par se retrouver dans la deuxième situation, c'est à dire effectuer une sous-partition, et cela récursivement.

Il est inutile d'espérer obtenir le résultat pour une partition finie avec cet algorithme car pour toute forme obtenue, on n'obtiendra pas une forme paire à la fois pour k pair et k impair.

Si l'on ne peut espérer obtenir une partition finie, rien n'empêche d'essayer de démontrer la conjecture sur une partition infinie : en prouvant qu'il est possible de partitionner l'ensemble des valeurs possibles à l'infini, et que pour chaque valeur, il existe une partition telle que cette valeur soit dans la partie de la partition vérifiant la conjecture.

Cet algorithme permet également de réduire le nombre de tests à effectuer pour vérifier que tous les nombres jusqu'à une certaine valeur vérifient la conjecture.

Voici donc les premières formes vérifiant la conjecture :

8192k+2075
8192k+539
4096k+2587
8192k+1563
8192k+2331
8192k+4251
4096k+2203
8192k+5275
8192k+5787
8192k+4507
8192k+3483
4096k+1435
1024k+923
8192k+7259
8192k+6747
8192k+5723
4096k+3675
8192k+4955
4096k+2907
8192k+5979
1024k+347
256k+219
8192k+5371
8192k+4859
8192k+3835
4096k+1787
8192k+3067
4096k+1019
8192k+4091
1024k+507
256k+123
128k+59
32k+11
16k+3
8192k+6215
8192k+5191
4096k+3143
1024k+583
8192k+7495
8192k+6983
8192k+5959
4096k+3911
256k+199
128k+7
8192k+1191
8192k+679
8192k+7847
4096k+1703
8192k+7079
4096k+935
8192k+8103
1024k+423
256k+39
8192k+4199
8192k+2663
4096k+615
8192k+3687
8192k+4455
8192k+6375
4096k+231
8192k+7399
8192k+7911
8192k+6631
8192k+5607
4096k+3559
1024k+999
32k+23
8192k+207
8192k+7375
4096k+1231
8192k+719
8192k+6607
4096k+463
8192k+7631
1024k+975
256k+79
128k+15
8192k+2095
8192k+1071
4096k+3119
8192k+2607
8192k+303
4096k+2351
8192k+1327
1024k+815
256k+175
8192k+1135
8192k+623
8192k+7791
4096k+1647
8192k+7023
4096k+879
8192k+8047
1024k+367
8192k+5871
8192k+5615
8192k+5103
8192k+4079
4096k+2031
8192k+2079
8192k+543
4096k+2591
8192k+1567
8192k+799
8192k+7967
4096k+1823
1024k+287
8192k+6815
8192k+6559
8192k+5023
4096k+2975
8192k+6047
8192k+2271
8192k+1247
4096k+3295
1024k+735
8192k+3551
8192k+3039
8192k+2015
4096k+4063
256k+95
8192k+4159
8192k+3135
4096k+1087
1024k+575
8192k+5439
8192k+4927
8192k+3903
4096k+1855
8192k+191
4096k+2239
8192k+1215
8192k+1727
8192k+1983
8192k+4223
8192k+2431
4096k+383
8192k+3455
8192k+3967
8192k+255
4k+1
2k+0

En ayant recours au même algorithme, voici un arbre présentant en vert les premières formes dont la durée de vol en altitude est finie, et en orange les formes indéterminées.